



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

نمونه سوال  گام به گام

امتحان نهایی  جزوه

دانلود آزمون های آزمایشی 

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

۱- اندازه گیری و کمیت

در محیط پیرامون ما برخی از ویژگی‌ها مانند زیبایی یا مهربانی قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند. اما برای برخی از ویژگی‌ها مانند سنگینی و سبکی و یا بلندی و کوتاهی می‌توان یک روش اندازه‌گیری مورد توافق همگان تعریف کرد و آن‌ها را اندازه‌گیری کرد. ویژگی‌ای که بر اساس ارائه‌ی یک روش اندازه‌گیری مورد توافق همگان قابل اندازه‌گیری است **کمیت** نامیده می‌شود.

۲- یکای (واحد) اندازه‌گیری

مقدار مشخصی از هر کمیت را به عنوان مقیاس اندازه‌گیری آن کمیت انتخاب می‌کنند که به آن یکا یا واحد اندازه‌گیری آن کمیت گفته می‌شود. اندازه‌گیری هر کمیت به این صورت انجام می‌شود که مقدار آن کمیت چند برابر مقداری است که به عنوان یکا یا واحد اندازه‌گیری برای آن کمیت در نظر گرفته شده است. برای آن که رقم‌های حاصل از اندازه‌گیری‌های مختلف یک کمیت با هم یکی باشند، دانشمندان توافق کرده‌اند که برای هر کمیت یکای معینی تعریف کنند. یکای هر کمیت باید به گونه‌ای انتخاب شود که در شرایط فیزیکی تعیین شده تغییر نکند و همواره در دسترس باشد. مجموعه یکاهای مورد توافق بین‌المللی را به اختصار یکاهای SI می‌نامند. SI حروف اول واژه‌ی فرانسوی Systeme International به معنای دستگاه بین‌المللی است.

۳- یکاهای اصلی و فرعی

آن دسته از کمیت‌هایی را که یکاهای آن‌ها به طور مستقل و بدون رابطه با سایر یکاهای دیگر تعریف می‌شود **کمیت اصلی** و یکاهای آن‌ها را **یکای اصلی** می‌نامند. سایر کمیت‌ها را که یکاهای آن‌ها با کمک رابطه‌ی آن‌ها با کمیت‌های دیگر و با استفاده از یکاهای دیگر تعریف می‌شود **کمیت فرعی** و یکاهای آن‌ها را **یکای فرعی** می‌نامند. طول، جرم، زمان، دما و شدت جریان الکتریکی از جمله کمیت‌های اصلی در SI هستند. نیرو، اندازه حرکت، کار و میدان الکتریکی از جمله کمیت‌های فرعی در SI هستند.

۴- تعریف یکای طول در SI

یکای طول در SI متر نام دارد و آن را با نماد m نشان می‌دهند. برای این یکا نمونه‌ی استاندارد ساخته شده است که در موزه‌ی سور پاریس نگهداری می‌شود. این نمونه میله‌ای است از جنس آلیاژ پلاتین و ایریدیوم با دو علامت روی آن که فاصله‌ی بین آن‌ها در دمای صفر درجه‌ی سلسیوس به طور دقیق برابر طول توافق شده‌ی بین‌المللی برای یک متر است. در موسسه‌های استاندارد هر کشور نمونه‌هایی مشابه با این نمونه‌ی استاندارد تهیه و نگهداری می‌شود.

۵- تعریف یکای جرم در SI

یکای جرم در SI کیلوگرم نام دارد و آن را با نماد kg نشان می‌دهند. برای این یکا نمونه‌ی استاندارد به صورت استوانه‌ای از جنس آلیاژ پلاتین و ایریدیوم ساخته شده است که در موزه‌ی سور فرانسه نگهداری می‌شود. در موسسه‌های استاندارد همه‌ی کشورها نمونه‌هایی مشابه با این نمونه‌ی استاندارد را تهیه و نگهداری می‌کنند.

۶- تعریف یکای زمان در SI

یکای زمان در SI ثانیه نام دارد و آن را با نماد s نشان می‌دهند. طبق تعریف اولیه و قدیمی یک ثانیه برابر $\frac{1}{۸۶۴۰۰}$ یک شبانه‌روز است.

-۷

یکای مناسب برای کمیت‌های خیلی بزرگ و خیلی کوچک در SI پیشوندهایی برای یکاها تعریف کرده‌اند که با اضافه کردن آن‌ها به یکای هر کمیت می‌توان یکاهای بزرگ‌تر و کوچک‌تری را برای اندازه‌گیری مقدارهای خیلی بزرگ و خیلی کوچک به وجود آورد. این یکاها در جدول زیر آورده شده‌اند.

پیشوند	مضرب	نماد	پیشوند	مضرب	نماد
دسی	10^{-1}	d	دکا	۱۰	da
سانتی	10^{-2}	c	هکتو	10^2	h
میلی	10^{-3}	m	کیلو	10^3	k
میکرو	10^{-6}	μ	مگا	10^6	M
نانو	10^{-9}	n	گیگا	10^9	G
پیکو	10^{-12}	p	ترا	10^{12}	T

-۸

نمادگذاری علمی

در اندازه‌گیری مقدارهای بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک به اعدادی برخورد می‌کنیم که به علت تعداد زیاد صفر در سمت راست آن اعداد و یا تعداد زیاد صفر بعد از ممیز آن اعداد در نمایش و خواندن آن‌ها با مشکل مواجه می‌شویم و در نتیجه احتمال اشتباه افزایش پیدا می‌کند و نوشتن و محاسبه آن‌ها دشوار است. این اعداد را با استفاده از روشی که آن را نمادگذاری علمی می‌نامند نمایش می‌دهند تا هم در نمایش و هم در محاسبه سهولت ایجاد شود.

در نمادگذاری علمی هر مقدار را به صورت حاصل ضرب عددی بین ۱ و ۱۰ و ضرب توان صحیحی از ۱۰ می‌نویسند.

مثال ۱ : جرم یک الکترون بر حسب کیلوگرم برابر 9.109×10^{-31} است که آن را به صورت 9.109×10^{-31} نشان می‌دهند.

مثال ۲ : فاصله‌ی زمین تا خورشید بر حسب متر حدود $150,000,000,000$ است که آن را به صورت 1.5×10^{11} نشان می‌دهند.

دقت اندازه گیری

کمترین مقداری را که یک وسیله ی اندازه گیری می تواند اندازه بگیرد دقت اندازه گیری آن وسیله می نامند. یک وسیله ی اندازه گیری نمی تواند مقداری را که کمتر از دقت اندازه گیری آن است اندازه گیری کند. بنابراین نتیجه ی اندازه گیری توسط یک وسیله ی اندازه گیری باید همواره مضرب درستی از دقت اندازه گیری آن وسیله باشد. مثال ۱: در اندازه گیری طول با خط کشی که بر حسب میلی متر درجه بندی شده است، اگر نتیجه ی اندازه گیری بر حسب میلی متر بیان شود باید حتما عدد صحیح باشد. مثال ۲: در اندازه گیری جرم با ترازویی که کمترین درجه بندی آن برابر ۲۵۰ گرم است، اگر نتیجه ی اندازه گیری بر حسب گرم بیان شود باید حتما بر ۲۵۰ بخش پذیر باشد. مثال ۳: در اندازه گیری حجم مایع با پیمانه ای که حجم آن برابر ۵ سی سی است، اگر نتیجه ی اندازه گیری بر حسب سی سی بیان شود باید حتما بر ۵ بخش پذیر باشد. مثال ۴: اگر طول جسمی ۱۵۵ میلی متر و با خط کشی که دقت آن ۱ cm است، طول آن را اندازه بگیریم مقدار اندازه گیری شده برابر ۱۵ cm خواهد بود چرا که این خط کش مقادیر کوچک تر از ۱ cm را نمی تواند اندازه بگیرد.

۱۰- تبدیل یکای طول :

فرض کنید می خواهیم مقدار یک طول را که بر حسب میکرومتر بیان شده است بر حسب هکتومتر بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک میلی متر چند هکتومتر است.

$$1 \text{ mm} = ? \text{ hm}$$

(۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ 1 \text{ hm} = 10^2 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ hm}} = \frac{10^{-3} \text{ m}}{10^2 \text{ m}} = 10^{-5} \Rightarrow 1 \text{ mm} = 10^{-5} \text{ hm}$$

(۲) روش دوم :

$$1 \text{ mm} = x \text{ hm} \Rightarrow 1 \times 10^{-3} \text{ m} = x \times 10^2 \text{ m} \Rightarrow 10^{-3} = x \times 10^2 \Rightarrow x = 10^{-5}$$

۱۱- تبدیل یکای مساحت :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک مساحت را که برحسب کیلومترمربع بیان شده است برحسب دسی‌مترمربع بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک کیلومترمربع چند دسی‌مترمربع است.

$$1 \text{ km}^2 = ? \text{ dm}^2$$

توجه کنید که منظور از مساحت یک کیلومترمربع (1 km^2) مساحت یک مربع به ضلع یک کیلومتر است که این مساحت برابر $1 \text{ km}^2 = 1000 \text{ m} \times 1000 \text{ m} = 10^6 \text{ m}^2$ به دست می‌آید. به عبارت دیگر منظور از km^2 دقیقاً $(\text{km})^2$ است و نباید آن را $k(\text{m}^2)$ یا 10^3 m^2 فرض کرد. (۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \\ 1 \text{ dm} = 10^{-1} \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ dm}} = \frac{10^3 \text{ m}}{10^{-1} \text{ m}} = 10^4 \Rightarrow \left(\frac{1 \text{ km}}{1 \text{ dm}} \right)^2 = 10^8$$

$$\Rightarrow \frac{1 \text{ km}^2}{1 \text{ dm}^2} = 10^8 \Rightarrow 1 \text{ km}^2 = 10^8 \text{ dm}^2$$

(۲) روش دوم :

$$1 \text{ km}^2 = x \text{ dm}^2 \Rightarrow 1 \times (10^3 \text{ m})^2 = x \times (10^{-1} \text{ m})^2 \Rightarrow 10^6 \text{ m}^2 = x \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow 10^6 = x \times 10^{-2} \Rightarrow x = 10^8$$

۱۲- تبدیل یکای حجم :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک حجم را که برحسب دکامترمکعب بیان شده است برحسب گیگامترمکعب بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک دکامترمکعب چند گیگامترمکعب است.

$$1 \text{ dam}^3 = ? \text{ Gm}^3$$

توجه کنید که منظور از حجم یک دکامترمکعب (1 dam^3) حجم یک مکعب به ضلع یک دکامتر است که این حجم برابر $1 \text{ dam}^3 = 10 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 10^3 \text{ m}^3$ به دست می‌آید. به عبارت دیگر منظور از dam^3 دقیقاً $(\text{dam})^3$ است و نباید آن را $\text{da}(\text{m}^3)$ یا 10 m^3 فرض کرد. (۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1 \text{ dam} = 10 \text{ m} \\ 1 \text{ Gm} = 10^9 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1 \text{ dam}}{1 \text{ Gm}} = \frac{10 \text{ m}}{10^9 \text{ m}} = 10^{-8} \Rightarrow \left(\frac{1 \text{ dam}}{1 \text{ Gm}} \right)^3 = 10^{-24}$$

$$\Rightarrow \frac{1 \text{ dam}^3}{1 \text{ Gm}^3} = 10^{-24} \Rightarrow 1 \text{ dam}^3 = 10^{-24} \text{ Gm}^3$$

(۲) روش دوم :

$$1 \text{ dam}^3 = x \text{ Gm}^3 \Rightarrow 1 \times (10 \text{ m})^3 = x \times (10^9 \text{ m})^3 \Rightarrow 10^3 \text{ m}^3 = x \times 10^{27} \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow 10^3 = x \times 10^{27} \Rightarrow x = 10^{-24}$$

۱۳- ۲- چگالی:

اگر از شما بپرسند که چوب سنگین تر است یا آهن، احتمالاً پاسخ شما آهن است. اما آیا یک میخ آهنی کوچک از تنه ی یک درخت سنگین تر است؟ منظور شما از این که آهن سنگین تر از چوب است، این بوده که اگر دو حجم مساوی از آهن و چوب برداریم، جرم آهن بیش تر خواهد بود. کمیت چگالی هم این موضوع را بررسی می کند. جرم یک واحد از حجم (مثلاً جرم یک سانتی متر مکعب) از هر ماده را جرم حجمی و یا چگالی آن ماده می نامند و با نماد ρ نمایش می دهند. بنابراین اگر جسمی با حجم V دارای جرم m باشد، می توان نتیجه گرفت که یک واحد از حجم

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ آن دارای جرم } \frac{m}{V} \text{ است. بنابراین:}$$

یکای SI چگالی $\frac{kg}{m^3}$ است ولی واحدهای دیگری چون $\frac{g}{cm^3}$ ، $\frac{kg}{lit}$ و ... نیز کاربرد فراوانی دارند.

مثال: یک گلوله ی ۱۰۰ گرمی از فلزی به چگالی $4 \frac{g}{cm^3}$ را درون یک لیوان پر از مایعی به چگالی $0.8 \frac{g}{cm^3}$

می اندازیم. چه جرمی از مایع بیرون می ریزد؟

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{\text{برای گلوله}} 4 = \frac{100}{V_1} \Rightarrow V_1 = 25 \text{ cm}^3$$

حجم مایعی که بیرون می ریزد، برابر حجم گلوله است. بنابراین $V_2 = 25 \text{ cm}^3$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 0.8 = \frac{m}{25} \Rightarrow m = 0.8 \times 25 = 20 \text{ g}$$

جرم مایعی که بیرون می ریزد ۲۰g است.

• چگالی یک مخلوط و یا یک آلیاژ، نسبت جرم مخلوط به حجم آن می باشد:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

مثال: 100 cm^3 از مایعی به چگالی $1 \frac{g}{cm^3}$ را با 100 cm^3 از مایعی به چگالی $2 \frac{g}{cm^3}$ مخلوط می کنیم. چگالی مخلوط

چقدر می شود؟

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \times 100 = 100 \text{ g} \\ m_2 = 2 \times 100 = 200 \text{ g} \end{cases}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{100 + 200}{100 + 100} = \frac{300}{200} = 1.5 \frac{g}{cm^3}$$

مثال: 100 g از مایعی به چگالی $1 \frac{g}{cm^3}$ را با 100 g از مایعی به چگالی $2 \frac{g}{cm^3}$ مخلوط می کنیم. چگالی مخلوط چقدر

می شود؟

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{100}{1} = 100 \text{ cm}^3 \\ V_2 = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{100 + 100}{100 + 50} = \frac{200}{150} = 1.33 \text{ g/cm}^3$$

کمیت‌های فیزیکی

-۱

کمیت‌های نرده‌ای : کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آن‌ها بیان یک عدد که اندازه یا مقدار آن کمیت می‌باشد، با یکای معین کافی است.

کمیت‌هایی مثل طول ، مساحت ، حجم ، جرم ، زمان ، چگالی و دما و جریان الکتریکی نرده‌ای هستند.
کمیت‌های برداری : کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آن‌ها بیان یک عدد با یکای معین کافی نیست و باید راستا و سوی این کمیت‌ها مشخص شود. به عبارت دیگر این کمیت‌ها دارای اندازه و جهت می‌باشند.
کمیت‌هایی مثل جابه‌جایی ، سرعت و نیرو برداری هستند.

بردارهای برابر

-۲

دو بردار در صورتی با هم برابرند که دارای اندازه ، راستا و سوی یکسانی باشند.

بردارهای قرینه

دو بردار در صورتی قرینه‌ی یکدیگرند که دارای اندازه و راستا یکسانی باشند و سوی آن‌ها متفاوت است.

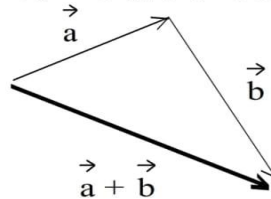
زاویه یک بردار

زاویه‌ای است که این بردار در جهت مثلثاتی با راستای مثبت محور طول‌ها (x ها) می‌سازد.

جمع دو بردار با استفاده از روش مثلث

-۳

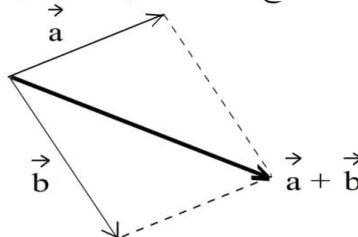
در این روش برای محاسبه‌ی $\vec{a} + \vec{b}$ ، مطابق شکل زیر ابتدای بردار $\vec{b}$ را روی انتهای بردار $\vec{a}$ قرار می‌دهیم. برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردار $\vec{a}$ و انتهای آن روی انتهای بردار $\vec{b}$ قرار دارد برآیند دو بردار است.



جمع دو بردار با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع

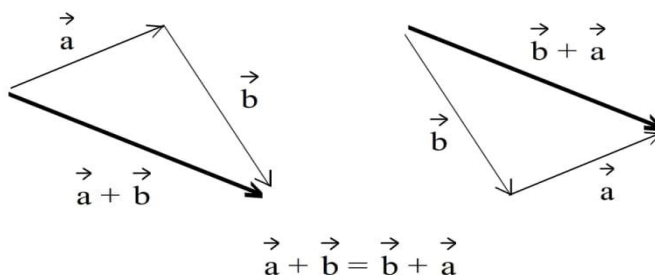
-۴

در این روش برای محاسبه‌ی $\vec{a} + \vec{b}$ ، مطابق شکل زیر ابتدای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را روی هم قرار می‌دهیم. متوازی‌الاضلاع‌ی رسم می‌کنیم که بردارها دو ضلع مجاور آن را تشکیل می‌دهند. برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردارها و انتهای آن روی راس مقابل متوازی‌الاضلاع قرار دارد برآیند دو بردار است.



نمایش خاصیت جابه‌جایی جمع برداری (با استفاده از روش مثلث)

-۵



نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار

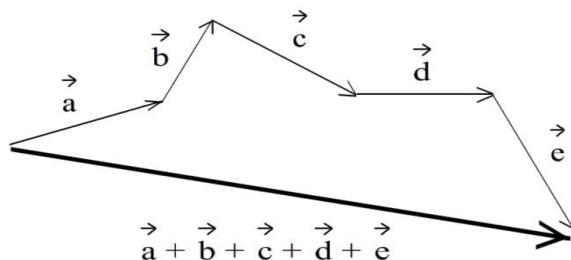
-۶

برای نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار $\vec{X}$ از نماد $|\vec{X}|$ یا X استفاده می‌شود.
توجه: برای نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار $\vec{X} + \vec{Y}$ باید از نماد $|\vec{X} + \vec{Y}|$ استفاده کنیم و نمی‌توانیم از نماد $X + Y$ استفاده کنیم. زیرا نماد $X + Y$ به معنای مجموع بزرگی‌های (اندازه‌های) بردارهای $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ است و به عبارت دیگر $X + Y$ برابر $|\vec{X}| + |\vec{Y}|$ است.

جمع چند بردار

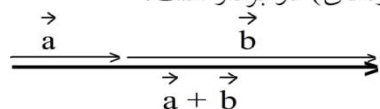
-۷

برای جمع کردن چند بردار مانند بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ و $\vec{e}$ می‌توانیم به این ترتیب عمل کنیم که مطابق شکل زیر از انتهای بردار اول، برداری مساوی بردار دوم و از انتهای بردار دوم، برداری مساوی بردار سوم و همین‌طور تا آخر ... رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردار اول و انتهای آن روی انتهای بردار آخر قرار دارد برآیند بردارها است.



۸- بردارهای هم‌راستا و هم‌سو:

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا و هم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم:
 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ یا $a + b = |a + b|$
یعنی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار هم‌راستا و هم‌سو برابر جمع بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

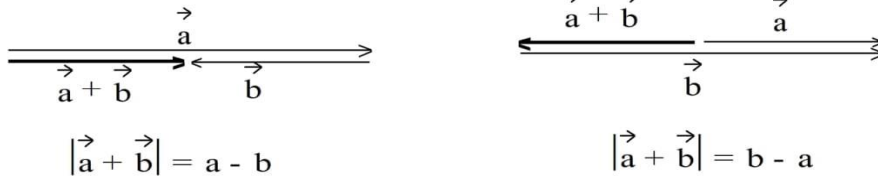


در این حالت جمع دو بردار هم‌سو است.

۹- بردارهای هم راستا و ناهم سو :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم راستا و ناهم سو باشند، برای بزرگی (اندازه ی) جمع دو بردار داریم :

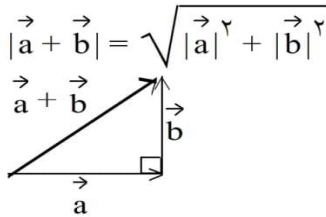
یعنی بزرگی (اندازه ی) جمع دو بردار هم راستا و ناهم سو برابر قدرمطلق تفریق بزرگی های (اندازه های) دو بردار است. در این حالت جمع دو بردار با برداری که بزرگی اش بزرگ تر است، هم سو خواهد بود.



۱۰- بردارهای عمود بر هم :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، برای بزرگی (اندازه ی) جمع دو بردار داریم :

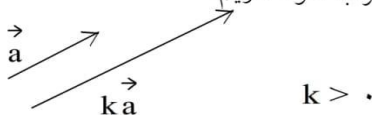
یا $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



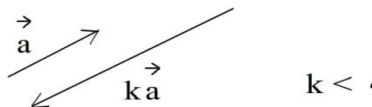
ضرب عدد در بردار

۱۱-

ضرب عدد مثبت در بردار : وقتی برداری را در عدد مثبتی ضرب می کنیم، راستا و سوی آن تغییر نمی کند و تنها بزرگی بردار در آن عدد ضرب می شود. اگر فرض کنیم عدد مثبت k در بردار $\vec{a}$ ضرب شود داریم:

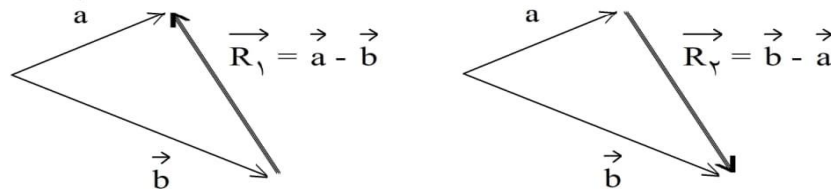


ضرب عدد منفی در بردار : وقتی برداری را در عدد منفی ضرب می کنیم، راستای آن تغییر نمی کند و سوی آن عکس می شود و بزرگی بردار در قدرمطلق آن عدد ضرب می شود. اگر فرض کنیم که عدد منفی k در بردار $\vec{a}$ ضرب شود، داریم:



تفریق دو بردار

برای به دست آوردن تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مطابق شکل‌های زیر ابتدای بردارها را روی هم قرار می‌دهیم. برداری که ابتدای آن روی انتهای بردار $\vec{b}$ و انتهای آن روی انتهای بردار $\vec{a}$ است برابر بردار $\vec{a} - \vec{b}$ است.



$$\Rightarrow \text{روش مثلث برای جمع دو بردار} \quad \begin{cases} \vec{b} + \vec{R}_1 = \vec{a} \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{a} - \vec{b} \\ \vec{a} + \vec{R}_2 = \vec{b} \Rightarrow \vec{R}_2 = \vec{b} - \vec{a} \end{cases}$$

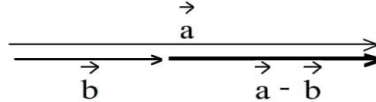
با توجه به شکل‌های بالا نتیجه گرفته می‌شود تفریق دو بردار خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی: $(\vec{a} - \vec{b}) \neq (\vec{b} - \vec{a})$. همچنین با توجه به شکل‌های بالا نتیجه گرفته می‌شود بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{b} - \vec{a}$ قرینه‌اند و $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$.

۱۳- بردارهای هم‌راستا و هم‌سو :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا و هم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \quad \text{یا} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = |a - b|$$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار هم‌راستا و هم‌سو برابر قدرمطلق تفریق بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

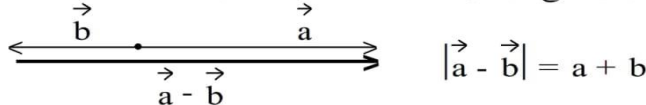


۱۴- بردارهای هم‌راستا و ناهم‌سو :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا و ناهم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = |a| + |b| \quad \text{یا} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = a + b$$

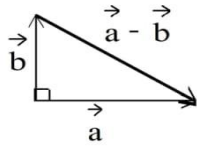
یعنی بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار هم‌راستا و ناهم‌سو برابر جمع بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.



۱۵- بردارهای عمود بر هم :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، برای بزرگی (اندازه ی) تفریق دو بردار داریم :

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2} \quad \text{یا} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



۱۶-

بیشینه و کمینه ی بزرگی (اندازه ی) جمع دو بردار

برآیند دو بردار وقتی بیشترین بزرگی (اندازه) را دارد که بردارها هم راستا و هم سو باشند. بنابراین بیشینه ی بزرگی (اندازه ی) جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $a + b$ است.

هم چنین برآیند دو بردار وقتی کمترین بزرگی (اندازه) را دارد که بردارها هم راستا و ناهم سو باشند. بنابراین کمینه ی بزرگی (اندازه ی) جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $|a - b|$ است.

یعنی برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همواره داریم :

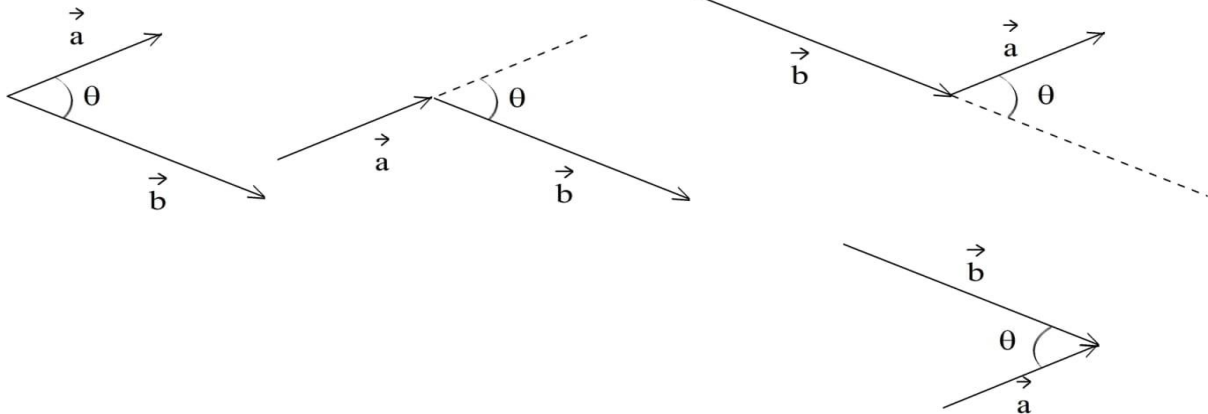
$$|a - b| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b$$

۱۷-

زاویه ی دو بردار

زاویه ی بین دو بردار هنگامی معلوم می شود که ابتدای دو بردار روی هم قرار بگیرند. در شکل های زیر زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در حالت های مختلف نشان داده شده است. این زاویه، زاویه ای است بین صفر تا 180° درجه.

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$



۱۸-

بزرگی اندازه ی برآیند دو بردار در حالت کلی

بزرگی برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویه ی بین آنها θ است از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

-۱۹

بزرگی اندازه ی تفریق دو بردار در حالت کلی

بزرگی تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویه ی بین آنها θ است از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

-۲۰

بزرگی اندازه ی برآیند دو بردار هم اندازه

بزرگی برآیند دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ که زاویه ی بین آنها θ است و اندازه ی یکسان a دارند، به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{R} = \vec{x} + \vec{y} \Rightarrow R = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta} = \sqrt{a^2 + a^2 + 2aa\cos\theta}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta} = a\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = a\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow R = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

-۲۱

بزرگی اندازه ی تفریق دو بردار هم اندازه

بزرگی تفریق دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ که زاویه ی بین آنها θ است و اندازه ی یکسان a دارند، به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2aa\cos\theta}$$

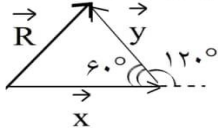
$$\Rightarrow r = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos\theta} = a\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = a\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow r = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

-۲۲- نکته: اندازه ی برآیند دو بردار هم اندازه با a که زاویه ی بین آنها ۹۰° درجه است برابر $\sqrt{2}a$ است.

$$R = 2a\cos\frac{\theta}{2}, \theta = ۹۰^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}a$$

-۲۳- نکته: اندازه ی برآیند دو بردار هم اندازه با a که زاویه ی بین آنها ۱۲۰° درجه است برابر a (هم اندازه با بردارها) است.



$$R = 2a\cos\frac{\theta}{2}, \theta = ۱۲۰^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{1}{2} = a$$

۲۴- نکته: اندازه ی برآیند دو بردار هم اندازه با a که زاویه ی بین آنها ۶۰° درجه است برابر $\sqrt{3}a$ است.

$$R = 2a \cos \frac{\theta}{2}, \quad \theta = 60^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$$

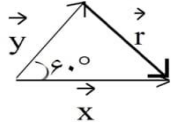
۲۵- نکته: اندازه ی تفریق دو بردار هم اندازه با a که زاویه ی بین آنها ۹۰° درجه است برابر $\sqrt{2}a$ است.

$$R = 2a \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta = 90^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a$$

۲۶- نکته: اندازه ی تفریق دو بردار هم اندازه با a که زاویه ی بین آنها ۱۲۰° درجه است برابر $\sqrt{3}a$ است.

$$R = 2a \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta = 120^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$$

۲۷- نکته: اندازه ی تفریق دو بردار هم اندازه با a که زاویه ی بین آنها ۶۰° درجه است برابر a (هم اندازه با بردارها) است.

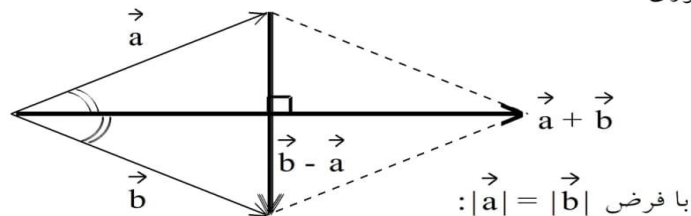


$$R = 2a \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta = 60^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{1}{2} = a$$

خواص جمع و تفریق بردارهای هم اندازه

۲۸-

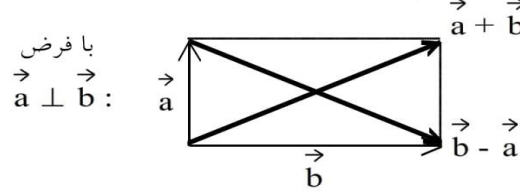
با توجه به شکل زیر جمع بردارهای هم اندازه در راستای نیمساز بردارها قرار می گیرد و جمع و تفریق بردارهای هم اندازه بر هم عمود هستند. زیرا متوازی الاضلاعی که بردارها با یکدیگر می سازند لوزی است و قطرهای لوزی بر هم عمود و نیمساز زاویه های لوزی هستند.



-۲۹

خواص جمع و تفریق بردارهای عمود بر هم

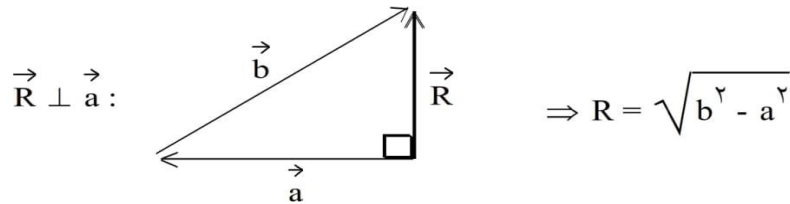
با توجه به شکل زیر جمع و تفریق بردارهای عمود بر هم، هم اندازه هستند. زیرا متوازی الاضلاعی که بردارها تشکیل می دهند مستطیل است و قطره های مستطیل هم اندازه اند.



-۳۰

عمود بودن برآیند بردارها بر یکی از بردارها

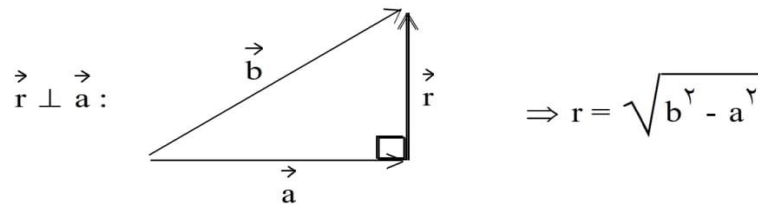
اگر برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را $\vec{R}$ فرض کنیم و $\vec{R}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود باشد، با توجه به شکل زیر داریم:



-۳۱

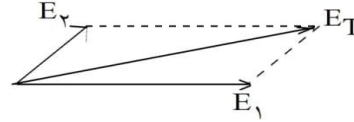
عمود بودن تفریق بردارها بر یکی از بردارها

اگر تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را $\vec{r}$ فرض کنیم و $\vec{r}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود باشد، با توجه به شکل زیر داریم:



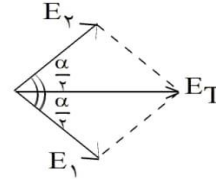
-۳۲

برآیند نیروها و میدان‌های الکتریکی



برآیند دو میدان الکتریکی E_1 و E_2 که با هم زاویه‌ی α می‌سازند $\leftarrow E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}$

$\leftarrow E_T = 2E_1\cos\frac{\alpha}{2}$ اگر بزرگی E_1 و E_2 برابر باشد



-۳۳

اگر بزرگی E_1 و E_2 مساوی نباشد، میدان الکتریکی برآیند نزدیک به میدان بزرگ‌تر می‌شود و اگر بزرگی E_1 و E_2 مساوی باشد، میدان الکتریکی برآیند نیمساز زاویه‌ی بین آنها می‌باشد.

$\Rightarrow \vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ اگر میدان‌های الکتریکی هم‌امتداد باشند.

	$E_T = E_1 + E_2 $
	$E_T = E_2 - E_1 $